Eine Methode zur räumlichen Bahnbestimmung bewegter Kometenschweifmaterie

(mit Anwendung auf den Halleyschen Kometen)

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der

Philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

Von

Friedrich Gondolatsch

aus Görlitz

Tag der Promotion: 27. September 1929.

Kiel 1929.

Druck von C. Schaidt, Inhaber Georg Oheim. 14423

Referenten: Prof. Dr. *A. Kopff*
Prof. Dr. *P. Guthnick*

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Eine Methode zur räumlichen Bahnbestimmung bewegter Kometenschweifmaterie (mit Anwendung auf den *Halley*schen Kometen).

Inhalt.

I. Komet Halley. Messungen und Reduktion auf die Ebene der Kometenbahn 1
II. Versuche zur räumlichen Bahnbestimmung der Schweifmaterie.
Versuche zur Bestimmung des Ausströmungsmomentes 3
Versuche zur 1. Bahn im Raum 4
Versuche zur Bahnverbesserung 6
III. Die Methode der räumlichen Bahnbestimmung . . 7
IV. Der Schweif des Kometen *Halley* 1910 Juni 5–7. . 10

In Anlehnung an die von *P. Harzer*[1]) aufgestellte allgemeine Methode der Bahnbestimmung, die auf dem Prinzip der *Laplace*schen Bahnbestimmung beruht, hat *A. Kopff*[2]) eine Methode zur Bahnbestimmung bewegter Kometenschweifmaterie ausgearbeitet, die die Lage von Schweifpunkten im Raum, unabhängig von der Annahme, der Schweif habe sich in der Ebene der Kometenbahn befunden, zu ermitteln gestattet. Die *Harzer*sche Methode ist von *A. O. Leuschner*[3]) in einigen Punkten vereinfacht worden und es war das ursprüngliche Ziel der vorliegenden Arbeit, die Methode von *Kopff* entsprechend diesen *Leuschner*schen Verbesserungen umzugestalten. Ferner aber war es besonders wichtig, ein neues Verfahren zur Bahnverbesserung, besonders auch zur Verbesserung des Ausströmungsmomentes der Schweifmaterie zu finden, da die *Kopff*sche Methode der Bahnverbesserung durch Variation der Elemente sich als zu kompliziert erwiesen hat.

I. Komet *Halley*. Messungen und Reduktion auf die Ebene der Kometenbahn.

Verbunden wurde mit der Ausarbeitung der eben genannten Methoden eine Bahnbestimmung für Schweifmaterie des Kometen *Halley* (1910 II) aus Beobachtungen von 1910 Juni 5–7. In diesen Tagen bildete sich südlich vom Hauptschweif des Kometen ein heller Schweifstrahl, an dessen Anfang (der dem Kometenkern am nächsten gelegenen Stelle) sich eine rundliche Verdichtung befand. Die Erscheinung ist außer von anderen Beobachtern besonders von *H. D. Curtis*[4]) und *E. E. Barnard*[5]) beschrieben worden; *A. Orloff*[6]) und *S. Orloff*[7]) haben versucht, die Bahn dieser Verdichtung in der Ebene der Kometenbahn und die Repulsivkraft der Sonne zu bestimmen.

Zur vorliegenden Arbeit standen 12 Aufnahmen zur Verfügung (vgl. Tabelle 1).

Tabelle 1.

Sphärische Koordinaten der Schweifpunkte.

Nr.	Mitte der Exposition M. Z. Gr. – Lichtzeit	Expositionsdauer	α 1910.0 [1])	δ 1910.0 [1])	Beobachtungsort	Instrument	
1	1910 Juni 5.63424	68m	153° 5′ 6″	+0° 30′ 47″	Yerkes	Bruce	10 Zoll
2	5.81059	146	153 16 15	+0 24 23	Diamond Head	Brashear	6 »
3	6.65347	120	154 58 45	−0 23 8	Yerkes	Bruce	10 »
4	»	120	154 58 51	−0 23 54	»	»	10 »
5	»	120	154 58 31	−0 23 5	»	Voigtländer	$6^1/_4$ »
6	6.74060	125	155 11 2	−0 27 58	Lick	Willard	$5^1/_4$ »
7	6.83225	99	155 26 53	−0 34 48	Diamond Head	Brashear	6 »
8	»	99	155 25 21	−0 34 38	»	»	6 »
9	»	99	155 26 39	−0 34 40	»	»	6 »
10	7.28596	120	156 44 37	−1 4 26	Beirut	?	7 »
11	7.65567	115	157 51 33	−1 33 6	Yerkes	Bruce	10 »
12	7.73655	120	158 3 20	−1 36 21	Lick	Willard	$5^1/_4$ »

[1]) korrigiert für Parallaxe und Aberration.

Von den Aufnahmen Nr. 1–3, 5, 8, 11 standen Papierabzüge zur Verfügung[8]); von den anderen Aufnahmen wurden folgende Reproduktionen benutzt: Nr. 4: ApJ **39**.402 (1914); Nr. 7, 10: ApJ **39**.380 (1914)[9]); Nr. 6, 12: Publ ASP **22**.124

[1]) AN **141**.177 (1896). [2]) Publ. des Astrophys. Instituts Königstuhl-Heidelberg, Bd. III, Nr. 2 (1907).
[3]) Lick Publ. Vol. VII (1913). [4]) Publ ASP **22**.124 (1910). [5]) AN **186**.11 (1910) und ApJ **39**.380 (1914).
[6]) Publikationen der Universitäts-Sternwarte Dorpat, Bd. 21, Heft 4, S. 43 (1911). [7]) RAJ Bd. 2, Heft 3, S. 4 (1925).
[8]) Für die bereitwillige Überlassung der Abzüge sei dem Yerkes Observatory bestens gedankt.
[9]) Die Zeitangabe unter Aufnahme 7 in ApJ **39**.380 muß statt Juni 6 $18^h.5$ Gr. M. T. heißen: Juni 6 $20^h.1$ Gr. M. T.

(1910); Nr. 9: Publ AASA Vol. II Plate XXVIII (1915). Identisch sind die Aufnahmen Nr. 3 und 4 und ferner 7, 8 und 9. Die Originalplatten zur Ausmessung zu benutzen ist wegen der Ungenauigkeit, die durch die große Ausdehnung des Objektes und die Schwierigkeit der Identifizierung entsteht, in keiner Weise notwendig. Gemessen wurde auf allen Aufnahmen der Schwerpunkt der oben erwähnten Verdichtung am Anfang des Schweifstrahles. Die Verdichtung ist am klarsten auf den Aufnahmen von Juni 6; Juni 7 ist sie bereits ziemlich ausgedehnt und beginnt zu verschwimmen. Juni 5 ist nur in unmittelbarer Nähe des Kerns eine helle Spitze zu sehen, die vermutlich mit der Schweifverdichtung von Juni 6–7 identifiziert werden darf, jedoch sehr schwierig zu messen ist.

Die Ausmessung wurde mit Hilfe einer in Quadratmillimeter geteilten Platte (Zeiß) vorgenommen, die Genauigkeit der Ablesung betrug 0.01 cm. Durch rechtwinkelige Koordinaten wurden die Schweifverdichtung und der Kometenkern auf jeder Aufnahme an 4 Vergleichsterne angeschlossen. Die Messung wurde zweimal vollständig unabhängig durchgeführt; die Einstellung erfolgte auf die Mitte des Sternstriches. Die Koordinaten α und δ wurden nach der *Turner*schen Reduktionsmethode bestimmt. Die Ergebnisse der Messungen sind in Tabelle 1 enthalten.

Um die größtmögliche Genauigkeit der aus den unsicheren Positionen zu berechnenden Schweifbahn zu erzielen, schließt man die Bahnbestimmung an die Bahn des Kometenkerns an. Dieser Anschluß erfolgt durch Bestimmung des Ausströmungsmomentes der Schweifmaterie. Im Zeitpunkt der Ausströmung haben sich Kern und Schweifmaterie am gleichen Ort befunden; mit der Kenntnis dieses Momentes kann man also aus der sicheren Kometenbahn den Ort der Schweifmaterie für diesen einen Moment berechnen. Bestimmt wird der Ausströmungsmoment als der Schnittpunkt der Kometenbahn mit einer in erster Näherung berechneten Schweifteilchenbahn. Diese erste Näherung, die auf verschiedene Weise durchgeführt werden kann (vgl Abschn. II) basiert auf der Annahme, die Schweifmaterie habe sich in der Ebene der Kometenbahn befunden.

Daher mußten zur weiteren Fortführung der Rechnung die an der Sphäre beobachteten Örter in die Ebene der Kometenbahn projiziert werden. Dies geschah mit Hilfe der *Bessel*schen Formeln[1]). Die Koordinaten des Kometenkerns wurden nicht aus den gemessenen Positionen bestimmt, sondern der größeren Genauigkeit wegen aus den Bahnelementen berechnet (vgl. Tabelle 2). Als Elemente wurden die von *Crommelin* in Mem BAA Vol. XIX, Part I, S. 32 (1912) gegebenen benutzt, dabei für ω, Ω, i die *Merfield*schen Werte[2]).

T 1910 April 19.6794 M. Z. Gr.

ω	111° 43′ 24″	1910.0
Ω	57 15 56	
i	162 12 34	
$\log q$	9.76876	
$\log a$	1.253986	
e	+0.967283	
μ	46″.669	

Tabelle 2. Koordinaten des Kometen *Halley*.

Aufnahme	M. Z. Gr. 1910 Juni	$\alpha_{\mathscr{H}}$ 1910.0	$\delta_{\mathscr{H}}$ 1910.0	log ϱ	log r	V
1	5.63424	152° 50′ 47″.9	+0° 36′ 39″.8	9.833935	0.050104	88° 16′ 0″.6
2	5.81059	152 58 20.4	+0 33 56.2	9.838181	0.051158	88 24 53.4
3–5	6.65347	153 32 40.8	+0 21 30.0	9.857909	0.056166	89 6 44.2
6	6.74060	153 36 4.7	+0 20 16.4	9.859893	0.056680	89 10 59.6
7–9	6.83225	153 39 35.4	+0 19 0.0	9.861977	0.057220	89 15 29.0
10	7.28596	153 56 39.6	+0 12 48.6	9.872127	0.059886	89 37 29.8
11	7.65567	154 10 2.2	+0 7 56.7	9.880225	0.062046	89 55 15.2
12	7.73655	154 12 55.4	+0 6 53.9	9.881975	0.062518	89 59 6.2

Die Koordinaten des Pols der Kometenbahn sind: $A = 41° 29′ 48″.5$, $D = 290° 4′ 7″.4$. Die Koordinaten der gemessenen Schweifpunkte in der Ebene der Kometenbahn sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

In Tabelle 3 sind Δ und φ die kometozentrischen Koordinaten; nämlich Δ der Abstand des Schweifteilchens vom Kometenkern und φ der Winkel zwischen Δ und dem verlängertenRadiusvektor des Kerns (negativ vor dem verlängerten Radiusvektor im Sinne der Bewegungsrichtung des Kometen). R und ω sind die heliozentrischen Koordinaten, R der Radiusvektor und ω der Winkel zwischen R und der Kometenbahnachse.

Tabelle 3. Koordinaten der Schweifpunkte in der Ebene der Kometenbahn.

Aufnahme	M. Z. Gr. 1910 Juni	Δ	φ	R	ω
1	5.63424	0.003378	+ 2° 35′ 20″	1.124090	88°.2592
2	5.81059	0.006343	−22 50 59	1.131431	88.5394
3	6.65347	0.031381	−19 44 20	1.167800	89.6322
4	»	0.032320	−20 57 3	1.168516	89.6789
5	»	0.031381	−19 51 44	1.167318	89.6356
6	6.74060	0.033670	−18 0 57	1.171203	89.6928
7	6.83225	0.037540	−16 49 24	1.177046	89.7869
8	»	0.037733	−17 45 38	1.177076	89.8183
9	»	0.037436	−16 47 53	1.177014	89.7847
10	7.28596	0.052950	− 8 24 2	1.200258	89.9942
11	7.65567	0.071406	− 7 14 17	1.224067	90.3419
12	7.73655	0.072552	− 5 18 17	1.226531	90.2983

[1]) *R. Jaegermann*, Über die beim Kometen *Borrelly* 1903 IV beobachtete hyperbolische Bewegung der Schweifmaterie. Mém. de l'acad. imp. de St.-Pétersbourg. VIII. Série, Vol. XVI, Nr. 12, S. 20–22 (1905). [2]) AN **184**.227 (1910).

II. Versuche zur räumlichen Bahnbestimmung der Schweifmaterie.

Versuche zur Bestimmung des Ausströmungsmomentes. Zuerst wurde versucht, die genäherte Bestimmung der Schweifteilchenbahn in der Ebene der Kometenbahn nach der geometrischen Methode von *R. Jaegermann*[1]) vorzunehmen, die darauf beruht, daß durch die beobachteten Punkte eine Hyperbel gelegt wird, deren einer Brennpunkt in der Sonne liegt.

Aus den 3 Beobachtungen Nr. 5, 9 und 11 wurden die Bahnelemente der Schweifteilchenbahn und dann der Schnittpunkt dieser Bahn mit der Kometenbahn berechnet, und zwar wurde aus Sicherheitsrücksichten zur Berechnung des Schnittpunktes sowohl die *Jaegermann*sche[2]) als auch die *Kopff*sche[3]) Formel benutzt. Dabei ergab sich für die wahre Anomalie im Ausströmungsmoment $V_0 = 80°7$, ein Wert, der auf keinen Fall richtig sein kann; denn ein Blick auf die Kometenephemeride zeigt, daß dann die Ausströmung zu einer ganz unmöglichen Zeit stattgefunden haben müßte.

Der Grund für das Versagen der *Jaegermann*schen Methode ist einmal darin zu suchen, daß in den Gleichungen für die Exzentrizität und den Perihelwinkel (den Abstand des Schweifbahn-Perihels vom Kometenbahn-Perihel) Glieder von der Form

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_2)\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_3+\omega_2)$$

auftreten. Sind die Differenzen zwischen ω_1, ω_2 und ω_3 gering, so werden diese Glieder sehr klein und vermindern die Genauigkeit des Resultats, eine Erscheinung, die auch *N. T. Bobrovnikoff*[4]) erwähnt. Vor allem aber mußte die Methode im vorliegenden Fall wegen eines Zufalls versagen. In den oben erwähnten Formeln kommen nämlich auch Glieder von der Form

$$\cos\tfrac{1}{2}(\omega_3+\omega_2)\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_2)$$

vor. Nun liegen in unserem Fall alle ω-Werte in unmittelbarer Nähe von 90°, sodaß in obigem Produkt beide Faktoren äußerst klein werden und den Anlaß zu falschen Resultaten geben.

Zur Bestimmung einer ebenen Schweifteilchenbahn existiert eine mechanische Methode, die ursprünglich von *A. Orloff*[5]) ausgearbeitet worden ist und später von *S. Orloff*[6]) vereinfacht wurde. Die Ausgangsgleichungen der Methode bilden der Flächensatz und das Prinzip der Erhaltung der Energie. Für die Rechnung ist diese Methode sehr übersichtlich und kurz, zumal da man die von *S. Orloff* angegebenen Formeln zur Bestimmung von Exzentrizität und Parameter noch vereinfachen kann (s. Abschn. III, S. 8). Die einzige Schwierigkeit, die diese Methode enthält, ist die Bestimmung der Differentialquotienten $\frac{dR_m}{dt}$, $\frac{d^2R_m}{dt^2}$ und $\frac{d\omega_m}{dt}$. Dabei ist mit dem Index m ein beliebiger Zeitmoment gemeint, als den man am besten die Mitte zwischen der ersten und letzten oder zwischen zwei besonders guten Beobachtungen wählt.

Der von *S. Orloff* eingeschlagene Weg zur Bestimmung der Differentialquotienten ist folgender: Man legt durch die als Funktionen der Zeit gefundenen R- und ω-Werte graphisch Kurven und bestimmt aus diesen beiden Kurven die Funktionswerte für den ersten und letzten Beobachtungsmoment sowie für die Mitte M_m zwischen diesen beiden Zeitpunkten. Die Differentiation selbst nimmt dann *Orloff* durch Interpolation vor, indem er die gesuchten Differentialquotienten aus den 1. und 2. Differenzen nach den Formeln $\frac{dR_m}{dt} = \frac{R_m^{\,I}}{h}$ und $\frac{d^2R_m}{dt^2} = \frac{R_m^{\,II}}{h^2}$ berechnet, unter Vernachlässigung der 3. und höheren Differenzen.

Im vorliegenden Fall wurde versucht, die Funktionen $R(t)$ und $\omega(t)$ nicht auf graphischem, sondern auf analytischem Wege zu bestimmen. Zunächst wurde die einfache Produktentwicklung

$$y(x) = a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2)$$

zur Darstellung der Funktionen angewandt. Aus den R- und ω-Werten der drei Beobachtungen 5, 9 und 11 wurden die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und dann für die Mitte zwischen den Beobachtungen 5 und 11 (1910 Juni 7.15457) die Werte von R und ω berechnet. Darauf wurden nach dem *Orloff*schen Verfahren die Differentialquotienten und die Bahnelemente bestimmt. Bereits für die erste ermittelte Größe, den Winkel zwischen den beiden Perihelen der Kometen- und der Schweifbahn ergab sich der unmögliche Wert $\omega_\pi = 83°2$. Die Rechnung wurde daraufhin abgebrochen.

Da dies einfache Verfahren offenbar nicht genügt, wurden nunmehr alle Beobachtungen zur Bestimmung der Funktionen $R(t)$ und $\omega(t)$ herangezogen, und zwar wurden durch die R- und ω-Punkte unter Benutzung der Methode der kleinsten Quadrate Parabeln 2. Grades gelegt. Dies schien vor der graphischen Methode den Vorzug zu haben, daß alle beim Zeichnen der Kurve auftretende Willkür hier ausgeschaltet war.

Es mußten nun mehrere Versuche unternommen werden, um einen einigermaßen wahrscheinlichen Wert für den Ausströmungsmoment M_0 zu erhalten:

1. Zur Bestimmung der Differenzen $R_m^{\,I}$, $R_m^{\,II}$ und $\omega_m^{\,I}$ wurden die erste und letzte Beobachtung (Nr. 1 und 12) benutzt und die Werte von R und ω für die Mitte der Beobachtungszeiten (1910 Juni 6.6854) aus den analytischen Darstellungen berechnet. Damit ergab sich $M_0 = 1910$ Juni 1.7054, also ein sicher viel zu früh gelegener Wert.

2. Zur Bestimmung der Differentialquotienten, deren Unsicherheit die Hauptschuld an dem Mißglücken des 1. Versuches zu haben schien, wurden statt der ungenauen Beobachtung Nr. 1 von Juni 5 die R- und ω-Mittelwerte der Beobachtungen Nr. 3–5 benutzt. Jedoch verschlechterte sich damit das Ergebnis: es wurde $M_0 = 1910$ Mai 31.9724 erhalten.

3. Nunmehr wurden bei der Bestimmung der Differentialquotienten die Werte von R und ω für die Zeiten der Beobachtungen Nr. 1 und 12 nicht wie bisher den Beobachtungen selbst entnommen, sondern wurden wie die Werte für die Mitte der Beobachtungszeiten aus der analytischen Darstellung berechnet. Die Verbesserung, die damit erzielt

---

[1]) *R. Jaegermann*, Die Bewegung der Kometenschweifmaterie auf hyperbolischen Bahnen. Mém. de l'acad. imp. de St.-Pétersbourg. VIII. Série, Vol. XXII, Nr. 8, S. 4ff. (1908); Die definitive Bahnbestimmung der Kometenschweifmaterie. AN **176**.269 (1907).
[2]) AN **176**.271, Gl. (6). [3]) Publ. Heidelb., Bd. III, Nr. 2, S. 63, Gl. (18). [4]) Lick Bull 398, S. 162 (1928).
[5]) Publikationen der Univers.-Sternwarte Dorpat, Bd. 21, Heft 3, S. 3 (1910) (russ.) und Lick Bull 398, S. 162 (1928) (engl.).
[6]) RAJ Bd. 2, Heft 3, S. 8 (1925).

wurde, war äußerst gering. Es ergab sich $M_0 = 1910$ Juni 1.8384.

Da alle diese Versuche zu keinem guten Ergebnis geführt hatten, wurde jetzt der Ausströmungsmoment mit Hilfe der von *S. Orloff* erhaltenen Bahnelemente

$$\omega_\pi = 86°44'5''$$
$$\log p = 8.39928$$
$$e = 1.02276$$

bestimmt. Es ergab sich ein sehr wahrscheinlicher Wert: $M_0 = 1910$ Juni 4.4283.

Die analytische Methode zur Bestimmung der Funktionen $R(t)$ und $\omega(t)$, die ursprünglich sicherer schien als die graphische Methode, hat sich damit als unbrauchbar erwiesen. Dies zeigen nicht nur die 3 eben beschriebenen mißglückten Versuche, sondern es geht auch aus der Tatsache hervor, daß auf die verschiedenste Weise vergeblich versucht wurde, für die *Orloff*schen R- und ω-Werte, die eine für den vorliegenden Zweck viel günstigere Verteilung aufwiesen, analytische Ausdrücke für die Funktionen herzuleiten.

Die graphische Methode wird stets sehr sichere (gleichmäßige) Resultate liefern, selbst wenn man infolge der Streuung der Beobachtungsdaten nicht ganz sicher ist, wie die Kurve an der entscheidenden Stelle, der Mitte zwischen dem ersten und letzten Beobachtungsmoment, zu ziehen ist. Solange man nämlich die Werte von R und ω für den ersten und letzten Beobachtungsmoment festhält, indem man sie aus den Beobachtungen selbst nimmt, hat eine Unsicherheit des Funktionswertes im Zeitpunkt M_m lediglich Einfluß auf R_m^{II} und damit auf $\frac{d^2R_m}{dt^2}$, nicht aber auf $\frac{dR_m}{dt}$ und $\frac{d\omega_m}{dt}$. Eine Änderung von $\frac{d^2R_m}{dt^2}$ macht sich aber in den Elementen und im Wert des Ausströmungsmomentes nur wenig bemerkbar. Darüber hinaus hat die graphische Methode im *Orloff*schen Fall aber auch ein sehr gutes Resultat geliefert. Dies wird sie stets tun, wenn die Beobachtungszeiten gleichmäßig und günstig verteilt sind. Die mir zur Verfügung stehenden Aufnahmen zeigen in bezug auf den Moment M_m (1910 Juni 6.6854) eine äußerst ungünstige Verteilung. In unmittelbarer Nähe von M_m (bei der üblichen graphischen Darstellungsweise links von M_m) liegen die 3 verschiedenen Meßresultate der Beobachtungen 3–5 (Juni 6.6535) und der einzige weitere Anhaltspunkt für den Verlauf der R- und ω-Kurven nach dieser linken Seite sind die beiden entfernt gelegenen, sehr unsicheren Beobachtungen Nr. 1 und 2 (Juni 5.6342 und 5.8106), während bei *S. Orloff* zwischen Juni 5.81 und 6.65 noch 2 Beobachtungen von Dairen und Cordoba liegen.

Die weiteren Rechnungen wurden außer mit dem Ausströmungsmoment Juni 4.4283 auch mit dem Moment Juni 1.8384 durchgeführt, vor allem wegen der Aussicht, an den mit diesem letzten Wert erhaltenen Elementen die Leistungsfähigkeit des Bahnverbesserungsverfahrens zu erproben. Als jedoch diese Elemente nach der 1. Bahn im Raum eine ganz ungenügende Darstellung der Beobachtungen ergaben, wurde die Weiterführung der Rechnung für Juni 1.8384 aufgegeben.

Versuche zur 1. Bahn im Raum. In der *Laplace*schen Bahnbestimmungsmethode[1]) treten als Elemente die rechtwinkeligen heliozentrischen Koordinaten und Geschwindigkeiten x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0' in einem Zeitpunkt t_0 auf. Sie werden bestimmt als Funktionen der 6 Größen α_0, δ_0, ϱ_0, α_0', δ_0', ϱ_0'. Davon sind α_0, δ_0, α_0', δ_0' aus den Beobachtungen zu ermitteln; zur Bestimmung von ϱ_0 und ϱ_0' benutzt man die Bewegungsgleichungen

$$s'' = -\frac{s}{r^3} \qquad (s = x, y, z)$$

In unserem Fall der Schweifbahn-Bestimmung liegen die Verhältnisse ein klein wenig anders. An die Stelle der Unbekannten ϱ_0 tritt nämlich die unbekannte Repulsivkraft der Sonne μ. Diese Repulsivkraft, die die Bewegung der Schweifmaterie in einer zur Sonne konvexen Hyperbel hervorruft, wird in Einheiten der gewöhnlichen Sonnenattraktion gerechnet. Infolge des Vorhandenseins dieser Kraft haben die Bewegungsgleichungen in unserem Fall die Form

$$s'' = -\mu\frac{s}{r^3}$$

Durch das Auftreten dieser weiteren Unbekannten entsteht aber keine Schwierigkeit, da man als Moment t_0 den Ausströmungsmoment wählt, sodaß α_0, δ_0 und vor allem ϱ_0 aus der Kometenephemeride bekannt sind. Die Gleichung, die im gewöhnlichen Falle der Bahnbestimmung zur Berechnung von ϱ_0 dient, kann also hier zur Ermittelung von μ verwendet werden.

Zur Bestimmung von ϱ_0' und μ führt man die 3 Bewegungsgleichungen in die geozentrische Form über und erhält, wenn man noch statt ϱ die kurtierte Distanz $\sigma = \varrho\cos\delta$ einführt, durch Elimination 3 Gleichungen für σ, σ' und σ'', von denen wir die beiden folgenden brauchen:

$$\sigma' = \frac{\lambda}{\varkappa}\sigma$$
$$\mu = r^3\left(\frac{\sigma}{\varkappa} + \frac{1}{R^3}\right)$$

Hierin sind $\varkappa$ und λ komplizierte Ausdrücke, deren Berechnung *Leuschner*[2]) durch Einführung mehrerer Hilfsgrößen vereinfacht hat. Der Index o soll im folgenden fortgelassen werden; alle Größen beziehen sich auf den Anfang der Zeitzählung, den Ausströmungsmoment.

Setzt man

$$N = \alpha'^3\operatorname{tg}\delta - \alpha''(\operatorname{tg}\delta)' + \alpha'(\operatorname{tg}\delta)''$$
$$n = \alpha'^2\operatorname{tg}\delta + (\operatorname{tg}\delta)''$$
$$C_1 = \operatorname{tg}\delta\cos(A-\alpha) - \operatorname{tg}D$$
$$C_2 = \sin(A-\alpha),$$

dann werden

$$\varkappa = -\frac{S}{N}[C_1\alpha' + C_2(\operatorname{tg}\delta)']$$
$$\lambda = \frac{S}{2N}[C_1\alpha'' + C_2 n]$$

[1]) Vergl. *A. Kopff*, Komet *Swift*, S. 64ff.
[2]) Lick Publ. Vol. VII, S. 315 und *Klinkerfues-Buchholz*, Theoretische Astronomie, 3. Auflage (1912), S. 465.

A und D sind hierin Rektaszension und Deklination der Sonne; S ist die Projektion der Entfernung Sonne–Erde R auf den Äquator: $S = R \cos D$.

Daß in diesen Ausdrücken auch noch die 2. Ableitungen α'' und $(\operatorname{tg}\delta)''$ auftreten, erklärt sich daraus, daß man zur Bestimmung von μ und σ' die Bewegungsgleichungen benutzt. In diesen Gleichungen kommen ursprünglich x'', y'' und z'' vor, die bei der Überführung in die geozentrische Form das Auftreten von σ'', α'' und δ'' hervorrufen. α'' und δ'' lassen sich in gleicher Weise wie α' und δ' aus den Beobachtungen berechnen.

Die praktische Durchführung dieser ersten Näherung gestaltet sich nun so, daß man zuerst α, δ, ϱ, α', δ', α'', δ'' aus den Beobachtungen bestimmt und dann $\varkappa$, λ, μ und σ' berechnet. Mit $\varkappa$, λ und σ' lassen sich dann zunächst die Ableitungen der geozentrischen rechtwinkeligen Koordinaten ξ', η', ζ' und weiter unter Benutzung der rechtwinkligen Sonnenkoordinaten X, Y, Z und deren Ableitungen X', Y', Z' die gesuchten Elemente x, y, z, x', y', z' berechnen.

Für die beiden Ausströmungsmomente 1910 Juni 1.8384 und 4.4283, für die, wie schon erwähnt, diese Bahnbestimmungsmethode durchgeführt wurde, wurden zunächst α, δ und ϱ aus der Bahn des Kometenkerns bestimmt. Es ergab sich

M. Z. Gr. 1910 Juni	α 1910.0	δ 1910.0	$\log\varrho$
1.8384	149° 25′ 19″	+1° 50′ 41″	9.73080
4.4283	151 55 17	+0 56 43	9.80373

Wegen der schlechten Erfahrungen bei der Bestimmung der Differentialquotienten in der ebenen Bahn wurden dann α', α'', δ', δ'' auf folgendem Wege bestimmt. Durch den Ausströmungsmoment und sämtliche Beobachtungen wurden analytisch unter Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate Parabeln 4. Grades gelegt und diese analytischen Ausdrücke wurden dann differenziert. Zur Durchführung der Rechnung wurden α und δ in Bogenmaß verwandelt (s. Tabelle 4).

Tabelle 4.

Werte der Koordinaten α und δ in Bogenmaß.

Beob.-Nr.	1910 Juni	α	δ
	1.8384	2.60790	+0.0321964
	4.4283	2.65153	+0.0164988
1	5.6342	2.67184	+0.0089553
2	5.8106	2.67508	+0.0070930
3	6.6535	2.70490	−0.0067300
4	»	2.70492	−0.0069517
5	»	2.70483	−0.0067143
6	6.7406	2.70847	−0.0081350
7	6.8322	2.71308	−0.0101230
8	»	2.71263	−0.0100742
9	»	2.71301	−0.0100847
10	7.2860	2.73569	−0.0183163
11	7.6557	2.75516	−0.0270825
12	7.7366	2.75859	−0.0280273

Als Zeiteinheit τ wurden von jetzt an bei der Bahnbestimmung $\frac{1}{k}$ mittlere Sonnentage gewählt, während bisher die mit t bezeichneten Zeitdifferenzen in mittleren Sonnentagen gemeint waren. Unter α' z. B. ist die Ableitung $\frac{d\alpha}{d\tau}$ zu verstehen. Es ergaben sich für die Differentialquotienten die Werte der Tabelle 5.

Tabelle 5.

1. und 2. Differentialquotienten der sphärischen Koordinaten.

	1910 Juni 1.8384	1910 Juni 4.4283
$\log\alpha'$	0.00146_n	0.00447
$\log\alpha''$	2.11119	1.00827
$\log\delta'$	9.13401_n	9.51261_n
$\log\delta''$	0.42948	0.79105_n
$\log(\operatorname{tg}\delta)'$	9.13447_n	9.51273_n
$\log(\operatorname{tg}\delta)''$	0.43013	0.79092_n

Um diese Werte der Differentialquotienten zu prüfen, wurden noch die 3. und 4. Ableitungen von α und δ für die Ausströmungsmomente berechnet (Tabelle 6); mit Hilfe der *Taylor*-Entwickelung wurde dann die Beobachtung 11 dargestellt. Das Ergebnis war für beide Fälle völlig befriedigend.

Tabelle 6.

3. und 4. Differentialquotienten der sphärischen Koordinaten.

	1910 Juni 1.8384	1910 Juni 4.4283
$\log\alpha'''$	3.66442_n	2.56464
$\log\alpha^{IV}$	4.94934	4.77278
$\log\delta'''$	2.75867_n	3.00329_n
$\log\delta^{IV}$	3.94977	4.49042

Beobachtung 11.

α	Kurve	2.75502	2.75553
	Taylor-E.	2.75499	2.75554
δ	Kurve	−0.02655	−0.02690
	Taylor-E.	−0.02656	−0.02689

Für die mit dem Ausströmungsmoment 1910 Juni 1.8384 gerechnete Bahn I wurde

$$A = 69° 19′ 22″ \qquad \log\varkappa = 8.52981_n$$
$$\log\operatorname{tg} D = 9.60836 \qquad \log\lambda = 0.23525_n$$
$$\log S = 9.97308 \qquad \log\sigma = 9.73057$$
$$\log\sigma' = 1.43601 \qquad \mu = -18.0$$
$$x = -0.79484 \qquad x' = -22.292$$
$$y = -0.60579 \qquad y' = +14.044$$
$$z = -0.36413 \qquad z' = +\ 0.67398$$

μ, die effektive Kraft, ist so definiert, daß die absolute Repulsivkraft $1 - \mu$ stets positiv wird; μ ist also hier immer negativ.

In entsprechender Weise wurde die Rechnung für den Ausströmungsmoment 1910 Juni 4.4283 durchgeführt:

Bahn II.

$A = 71^\circ 58' 45''$	$\log \varkappa = 8.47837_n$
$\log \operatorname{tg} D = 9.61544$	$\log \lambda = 9.48473_n$
$\log S = 9.97223$	$\log \sigma = 9.80367$
$\log \sigma' = 0.81003$	$\mu = -27.1$
$x = -0.85162$	$x' = -5.0573$
$y = -0.59253$	$y' = +2.2063$
$z = -0.37646$	$z' = -0.21594$

Durch beide Bahnen wurden nun die Beobachtungen dargestellt. Die Methode ist im wesentlichen die gleiche wie die von *Kopff* bei der Bearbeitung des Kometen 1892 I verwendete; die Formeln sind im Abschnitt III angeführt.

Für die zur Darstellung der Beobachtungen benötigten Größen

p = Halbparameter,
e = Exzentrizität,
v_0 = wahre Anomalie des Ausströmungspunktes, vom Perihel der Schweifbahn gezählt,
a = große Halbachse,
M_π = Moment des Periheldurchganges,

wurden folgende Werte erhalten:

	Bahn I	Bahn II
$\log p$	1.59434	0.00795
e	39.940	1.9973
v_0	$18^\circ 11' 38''$	$15^\circ 42' 25''$
$\log a$	8.39180	9.53236
M_π	1910 Juni 1.1052	1.0983

Damit wurden die in Tabelle 7 gegebenen Darstellungen der Beobachtungen berechnet.

Tabelle 7.

Darstellung der Beobachtungen durch die nach der *Laplace*schen Methode gerechneten Bahnen.

Beob.-Nr.	Bahn I: B−R $\Delta\alpha$	Bahn I: B−R $\Delta\delta$	Bahn II: B−R $\Delta\alpha$	Bahn II: B−R $\Delta\delta$
1	$+4^\circ 14' 36''$	$-1^\circ 1' 58''$	$-0^\circ 7' 26''$	$+0^\circ 0' 39''$
2	+4 16 15	−1 7 59	−0 7 53	−0 1 27
3	+5 57 4	−1 53 40	+0 38 7	−0 28 4
4	+5 57 10	−1 54 26	+0 38 13	−0 28 50
5	+5 56 50	−1 53 37	+0 37 53	−0 28 1
6	+6 9 25	−1 58 22	+0 44 47	−0 30 47
7	+6 24 30	−2 4 50	+0 54 22	−0 35 20
8	+6 22 58	−2 4 40	+0 52 50	−0 35 10
9	+6 24 16	−2 4 42	+0 54 8	−0 35 12
10	+7 41 20	−2 33 36	+1 42 32	−0 53 42
11	+8 47 35	−3 1 38	+2 25 33	−1 13 11
12	+8 59 24	−3 4 50	+2 32 13	−1 14 28

Daß die Darstellung durch die Bahn I sehr schlecht werden würde, war zu erwarten. Daß aber auch die mit dem guten Ausströmungsmoment Juni 4.4283 gerechnete Bahn II die Beobachtungen derartig ungenügend darstellt, ist ein Zeichen für die Unbrauchbarkeit der Methode im vorliegenden Fall.

Es wurde noch der Versuch gemacht, die Differentialquotienten die die Schuld am Versagen der Methode haben, für die Bahn II aus den 3 ersten Momenten allein zu bestimmen, und zwar wurde die Rechnung mit folgenden 3 Zeitpunkten durchgeführt: t_0 war der Ausströmungsmoment Juni 4.4283, für t_1 wurde das Mittel der Beobachtungszeiten von Aufnahme 1 und 2 genommen: Juni 5.7224; t_2 war die Zeit der Beobachtungen 3–5: Juni 6.6535.

Es wurden folgende Werte für die Differentialquotienten erhalten:

$\log \alpha_0' = 9.62024$	$\log (\operatorname{tg} \delta_0)' = 8.80566_n$
$\log \alpha_0'' = 1.70789$	$\log (\operatorname{tg} \delta_0)'' = 1.45439_n$

Damit wurden

$\log \varkappa = 8.07028_n$	$\log \sigma' = 1.32275$
$\log \lambda = 9.58936_n$	$\mu = -71.48$

Während μ hier eine gute Übereinstimmung mit dem aus der ebenen Bahn von *S. Orloff* erhaltenen Wert ($\mu = -69.14$) zeigt, ist an dem viel zu großen Wert von σ' zu erkennen, daß auch auf diesem Wege kein befriedigendes Resultat zu erhalten ist. Die Rechnung wurde deshalb an dieser Stelle abgebrochen.

Diese Bahnbestimmungsmethode, die die Kenntnis der 1. und 2. Differentialquotienten der geozentrischen Koordinaten im Ausströmungsmoment voraussetzt, hat in den beiden Fällen, in denen sie von *A. Kopff* angewendet worden ist (Komet 1892 I und Komet 1903 IV), völlig befriedigende Resultate geliefert. Sie scheint zu versagen, sobald die Ungenauigkeit der Beobachtungen keine genügend genaue Bestimmung der Differentialquotienten zuläßt.

Bei der weiteren Durchführung der Rechnung wurde eine genäherte erste Bahn dadurch erhalten, daß angenommen wurde, das Schweifteilchen habe im Ausströmungsmoment außer dem gleichen Ort auch die gleiche Geschwindigkeit wie der Kern gehabt; die Anfangsgeschwindigkeit des Schweifteilchens relativ zum Kometenkern wurde also gleich 0 gesetzt. Für die Repulsivkraft μ wurde der aus der Bahn in der Ebene erhaltene Wert benutzt. Diese Methode ist äußerst einfach und führte zum Ziel. Sie ist im Abschnitt III entwickelt.

Versuche zur Bahnverbesserung. Wie schon in der Einleitung hervorgehoben, war es besonders wichtig, ein neues Bahnverbesserungsverfahren aufzustellen. Als verbesserungsbedürftig wurden zuerst nur die Elemente x', y', z' und μ angesehen, doch zeigte sich später, daß auch x, y, z aus der 1. Bahn noch nicht genügend genau bestimmt werden können.

Am nächsten lag es, das von *Harzer*[1]) in seiner Bahnbestimmungsmethode gegebene Verbesserungsverfahren anzuwenden, das *Kopff*[2]) schon beim Kometen *Borrelly* (1903 IV) mit Erfolg benutzt hat. Das *Harzer*sche Verfahren besteht darin, daß zwischen den geozentrischen Koordinaten α_t, δ_t und den zu verbessernden Elementen Differentialbeziehungen aufgestellt werden. Mit Hilfe dieser Beziehungen werden dann aus den Resten $\partial\alpha_t$ und $\partial\delta_t$, die bei einem Vergleich der ersten Näherung mit den Beobachtungen übrigbleiben, die Verbesserungen der Elemente bestimmt.

Der Übergang von den Koordinaten der Beobachtungszeiten t zu den Koordinaten im Nullmoment (Ausströmungs-

[1]) AN 141.184. [2]) AN 176.152.

moment) wird durch die Integration der Bewegungsgleichungen

$$s'' = -\mu \frac{s}{r^3} \qquad (s = x, y, z)$$

ermöglicht. Benutzt man die Koordinaten und Geschwindigkeiten im Ausströmungsmoment als Integrationskonstanten, so hat man die Gleichungen

$$s_t = f_t\, s_0 + g_t\, s_0' \,. \tag{1}$$

Hierin sind f_t und g_t Potenzreihen nach der Zeit, die r_0, r_0', r_0'' und in unserem speziellen Fall noch μ enthalten. Im gewöhnlichen Fall der Bahnbestimmung sind diese Reihen stets genügend schnell konvergent, hier aber werden sie wegen der großen Werte von μ im allgemeinen nicht konvergieren. In den beiden von *A. Kopff* bearbeiteten Kometenschweifbahnen ließen sich beim Komet *Swift* (1892 I) die Reihen nicht benutzen, beim Komet *Borrelly* (1903 IV) dagegen war ihre Anwendung wegen der außerordentlich geringen Zwischenzeiten möglich.

Nun gibt es aber einen von *Kühnert*[1]) angegebenen Weg, um f_t und g_t und die zugehörigen Variationen ∂f_t und ∂g_t in geschlossenen Ausdrücken darzustellen. Die Formeln wurden von mir für die zur Sonne konvexe Hyperbel berechnet. Man geht in folgender Weise vor:

Die integrierten Bewegungsgleichungen (1) werden für die beiden Koordinaten x und y angesetzt:

$$\begin{aligned} x_t &= f_t\, x_0 + g_t\, x_0' \\ y_t &= f_t\, y_0 + g_t\, y_0' \end{aligned} \tag{2}$$

Darin sind jetzt f_t und g_t die Unbekannten. Für x und y bestehen die geometrischen Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= r\cos v = a\left(e + \frac{1}{\cos F}\right) \\ y &= r\sin v = a \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg} F \,. \end{aligned} \tag{3}$$

Hierin ist ψ der Exzentrizitätswinkel $\cos\psi = \frac{1}{e}$ und F entspricht der exzentrischen Anomalie in der Ellipse und ist definiert durch $\operatorname{tg}\frac{F}{2} = \operatorname{tg}\frac{v}{2}\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}$.

Setzt man (3) in (2) ein und eliminiert, so erhält man

$$\begin{aligned} f_t &= \sec F \frac{a}{r}\left(e + \frac{1}{\cos F_t} - \sin F \operatorname{tg} F_t\right) \\ g_t &= \frac{r r'}{\mu}\,\frac{a}{e\cos F_t}\left[\frac{\sin F_t}{\sin F}(e\cos F + 1) - (e\cos F_t + 1)\right] . \end{aligned} \tag{4}$$

Darin gelten die veränderlichen Größen r, r' und F ohne Index für den Nullmoment.

Die gesuchten Differentialbeziehungen erhält man nun auf folgendem Wege: Man variiert die Gleichungen (4) in der Weise, daß auf den rechten Seiten nur Glieder mit den Variationen der zu verbessernden Elemente stehen. Da im vorliegenden Fall zunächst nur x', y', z' und μ als verbesserungsbedürftig angesehen wurden, hatten die Gleichungen die Form

$$\begin{aligned} \partial f_t &= A\,\partial x' + B\,\partial y' + C\,\partial z' + D\,\partial\mu \\ \partial g_t &= A'\partial x' + B'\partial y' + C'\partial z' + D'\partial\mu \,. \end{aligned} \tag{5}$$

[1]) AN **95**. Nr. 2266 (1879).

Dadurch, daß hier die Variationen ∂e, ∂a, ∂F, ∂F_t durch $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$, $\partial\mu$ ersetzt werden müssen, werden die Koeffizienten in den Gleichungen (5) äußerst kompliziert; ihre Berechnung wird auch durch Einführung von Hilfsgrößen nur wenig erleichtert.

Die in (5) gewonnenen Ausdrücke für ∂f_t und ∂g_t werden jetzt in die variierten Gleichungen (1)

$$\partial s_t = s_0\,\partial f_t + g_t\,\partial s_0' + s_0'\,\partial g_t \qquad (\partial s_t = \partial x_t, \partial y_t, \partial z_t) \tag{6}$$

eingesetzt. Und diese Ausdrücke für ∂x_t, ∂y_t, ∂z_t setzt man schließlich in die durch Variation der geometrischen Beziehungen zwischen rechtwinkligen und Polarkoordinaten erhaltenen Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho_t \cos\delta_t\,\partial\alpha_t &= -\sin\alpha_t\,\partial x_t + \cos\alpha_t\,\partial y_t \\ \varrho_t\,\partial\delta_t &= -\sin\delta_t(\cos\alpha_t\,\partial x_t + \sin\alpha_t\,\partial y_t) + \cos\delta_t\,\partial z_t \end{aligned} \tag{7}$$

ein. Damit ist die gesuchte Beziehung zwischen $\partial\alpha_t$, $\partial\delta_t$ und $\partial x', \partial y', \partial z', \partial\mu$ hergestellt; man stellt sie für alle Beobachtungen auf und gleicht dann aus.

Als sich zeigte, daß auch der Ausströmungsmoment verbessert werden müßte, kam zu den 4 gesuchten Verbesserungen noch eine fünfte hinzu. Da aber die Gleichungen (5) und noch mehr die Gleichungen (7) schon mit 4 Unbekannten sehr kompliziert waren, wurde von einer Umarbeitung der Methode für 5 Unbekannte abgesehen und der Plan, diese Bahnverbesserungsmethode praktisch anzuwenden, fallen gelassen. Der Aufwand an Rechenarbeit hätte in keinem Verhältnis zu der geringen Genauigkeit der Beobachtungen gestanden.

III. Die Methode der räumlichen Bahnbestimmung.

Bestimmung des Ausströmungsmomentes. Die Bestimmung des Ausströmungsmomentes, der die Schweifbahn mit der Bahn des Kometenkerns verbindet, erfolgt durch die Berechnung des Schnittpunktes dieser beiden Bahnen. Die dazu notwendige genäherte Bahn des Schweifteilchens wird unter der Annahme, das Schweifteilchen habe sich in der Ebene der Kometenbahn fortbewegt, berechnet. Die Projektion der beobachteten Örter in die Kometenbahn-Ebene erfolgt mit Hilfe der *Bessel*schen Formeln. Die Bahnbestimmung selbst geschieht am einfachsten nach der Methode von *S. Orloff*; stößt man dabei auf Schwierigkeiten, so steht noch die Methode von *R. Jaegermann* zur Verfügung (vergl. Abschnitt II).

Die Bewegung eines Punktes um ein festes Zentrum ist durch 2 Integrale der Bewegungsgleichungen, den Flächensatz und das Energieprinzip, bestimmt:

$$C = \frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t} R_m^2 \tag{1}$$

$$k^2\mu = \frac{\mathrm{d}^2 R_m}{\mathrm{d}t^2} R_m^2 - \frac{C^2}{R_m} \,. \tag{2}$$

Hieraus bestimmt *Orloff* zuerst die wahre Anomalie v_m (gezählt vom Perihel der Schweifbahn).

Es ist [vergl. S. 8 Gl. (11)]

$$\operatorname{tg} v_m = \frac{R_m \dfrac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}t}}{p + R_m}\sqrt{\frac{p}{k^2\mu}} \,. \tag{3a}$$

Wegen $p = \frac{C^2}{k^2\mu}$ wird in (3a) $\sqrt{\frac{p}{k^2\mu}} = \frac{C}{k^2\mu}$ und unter Benutzung von (2) wird

$$p + R_m = \frac{R_m^3 \frac{d^2R_m}{dt^2}}{k^2\mu}.$$

Also wird

$$\operatorname{tg} v_m = \frac{R_m \frac{dR_m}{dt} C}{R_m^3 \frac{d^2R_m}{dt^2}}$$

und unter Benutzung von (1)

$$\operatorname{tg} v_m = \frac{\frac{dR_m}{dt} \cdot \frac{d\omega_m}{dt}}{\frac{d^2R_m}{dt^2}} \qquad (3)$$

Die hier auftretenden Differentialquotienten bestimmt man am einfachsten graphisch (s. S. 3); der Index m bezieht sich auf einen beliebigen, am besten in der Mitte der Beobachtungen gelegenen Zeitpunkt. Für die Berechnung des Schnittpunktes von Schweif- und Kernbahn braucht man aus der Schweifbahn nur die 3 Elemente ω_π (Winkel zwischen den Perihelen der beiden Bahnen), p und e. Dadurch wird diese *Orloff*sche Methode außerordentlich kurz; die Bestimmung von p und e kann man dabei noch vereinfachen.

Es ist

$$\omega_\pi = \omega_m - v_m \qquad (4)$$

$$p = \frac{C^2}{k^2\mu} \qquad (5)$$

$$(\log k = 8.23558)$$

$$e = \frac{\frac{p}{R_m} + 1}{1 - 2\sin^2\frac{V_m}{2}} \qquad (6)$$

$$\cos\psi = \frac{1}{e}. \qquad (7)$$

Die wahre Anomalie V_0 des Ausströmungsmomentes erhält man dann, wenn die Bahn des Kometenkerns eine Ellipse ist, aus der Gleichung[1])

$$\operatorname{tg}\frac{V_0}{2} = \frac{e\sin\omega_\pi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\psi - \frac{p}{q}\left[(e\cos\omega_\pi - 1)\frac{2E}{1+E} + \frac{p}{q}\cdot\frac{1-E}{1+E} + 2\right]}}{e\cos\omega_\pi + 1 + \frac{p}{q}\cdot\frac{1-E}{1+E}} \qquad (8)$$

Hierin sind E und q Exzentrizität und Periheldistanz für den Kometenkern; das Zeichen − vor der Wurzel bezeichnet den ersten (im Sinne der Kernbewegung), das Zeichen + den zweiten Schnittpunkt von Ellipse und Hyperbel. Den Ausströmungsmoment M_0 berechnet man dann mit Hilfe von V_0 aus der Bahn des Kometenkerns.

[1]) *Kopff*, Publ. Heidelb., Bd. III Nr. 2, S. 63, Gl. (18).

Erste genäherte Bahn. Die gesuchten Elemente der ersten genäherten Bahn sind die rechtwinkligen äquatorealen Koordinaten und Geschwindigkeiten x, y, z, x', y', z' für den Ausströmungsmoment und die Repulsivkraft μ. Davon erhält man x, y, z aus der Bahn des Kometenkerns. x', y', z' wurden bei den beiden von *A. Kopff* bearbeiteten Schweifbahnen (*Swift* 1892 I und *Borrelly* 1903 IV) durch die *Laplace*sche Methode bestimmt. Wie sich jedoch beim Komet *Halley* gezeigt hat, wird diese Methode bei geringerer Genauigkeit der Beobachtungen unbrauchbar: die Ungenauigkeit der Differentialquotienten $\alpha', \alpha'', \delta', \delta''$ führt zu falschen Geschwindigkeitskomponenten x', y', z'. In solchen Fällen erhält man brauchbare x'-, y'-, z'-Werte am einfachsten dadurch, daß man die Anfangsgeschwindigkeit des Schweifteilchens relativ zum Kometenkern gleich o setzt, eine Annahme, die stets der Wirklichkeit nahe kommen wird. Man berechnet also außer x, y, z auch x', y', z' aus der Bahn des Kometenkerns. Für μ benutzt man den aus der Bahn in der Ebene erhaltenen Wert [Gl. (2), S. 7].

Mit diesen Elementen berechnet man die zur Darstellung der Beobachtungen nötigen Größen (vergl. S. 6) nach folgenden Formeln:

$$r' = \frac{xx' + yy' + zz'}{r} \qquad (9)$$

$$p = \frac{r^2(x'^2 + y'^2 + z'^2 - r'^2)}{\mu} \qquad (10)$$

$$e\sin v = r'\sqrt{\frac{p}{\mu}} \qquad e\cos v = \frac{p}{r} + 1 \qquad (11)$$

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} \qquad (12)$$

$$\operatorname{tg}\frac{F}{2} = \operatorname{tg}\frac{v}{2}\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \qquad (13)$$

$$M_\pi = M_0 - \frac{a^{3/2}}{\lambda k\sqrt{\mu}}\left[\lambda e\operatorname{tg}F + \log\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{F}{2}\right)\right] \qquad (14)$$

M_π = Periheldurchgangsmoment
M_0 = Ausströmungsmoment
λ = Modul der *Brigg*schen Logarithmen
$\log\lambda = 9.63778$

$$\sin a\sin(A'+v) = \frac{x}{r} \qquad \sin a\cos(A'+v) = \frac{rx' - xr'}{\sqrt{\mu p}}$$

$$\sin b\sin(B'+v) = \frac{y}{r} \qquad \sin b\cos(B'+v) = \frac{ry' - yr'}{\sqrt{\mu p}} \qquad (15)$$

$$\sin c\sin(C'+v) = \frac{z}{r} \qquad \sin c\cos(C'+v) = \frac{rz' - zr'}{\sqrt{\mu p}}$$

In den Gleichungen (9) bis (15) beziehen sich alle veränderlichen Größen auf den Ausströmungsmoment.

Die Bestimmung der geozentrischen Örter der Schweifmaterie erfolgt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho\cos\delta\cos\alpha &= r\sin a\sin(A'+v) + X \\ \varrho\cos\delta\sin\alpha &= r\sin b\sin(B'+v) + Y \\ \varrho\sin\delta &= r\sin c\sin(C'+v) + Z \end{aligned} \qquad (16)$$

In diesen Formeln werden r und v für die Beobachtungsmomente t als bekannt vorausgesetzt. Man erhält diese Größen durch Lösung der transzendenten Gleichung, die bei der Hyperbel die Rolle der *Kepler*schen Gleichung vertritt:

$$\frac{\lambda k\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}\,t = e\lambda\,\mathrm{tg}\,F + \log\mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{F}{2}\right). \tag{17}$$

Darin ist t gleich der Differenz Beobachtungszeit – Periheldurchgangszeit, ausgedrückt in mittleren Sonnentagen.

Jaegermann[1]) formt die Gleichung (17) zur Auflösung noch etwas um. Er setzt:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,F &= \mathfrak{Sin}\,\vartheta \\ \sec F &= \mathfrak{Cof}\,\vartheta \end{aligned} \qquad \vartheta = \log\mathrm{nat}\,\mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{F}{2}\right) \tag{18}$$

$$\frac{k\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}\,t = N. \tag{19}$$

Dann hat die transzendente Gleichung die Gestalt

$$e\,\mathfrak{Sin}\,\vartheta + \vartheta = N. \tag{20}$$

Die Auflösung der Gleichung (20) kann bei fünfstelliger Rechnung bedeutend einfacher erfolgen als *Jaegermann* angibt, der siebenstellige Genauigkeit fordert. Gegeben sind e und N, gesucht ist ϑ. Durch einige Versuche bestimmt man einen Näherungswert ϑ_1, der zu einem Argument N_1 gehört[2]). Wenn $\Delta N_1 = N - N_1$ gesetzt wird, so ist

$$\Delta\vartheta_1 = \frac{\Delta N_1}{e\,\mathfrak{Cof}\,\vartheta_1 + 1} \tag{21}$$

und es wird

$$\vartheta = \vartheta_1 + \Delta\vartheta_1. \tag{22}$$

r und v findet man dann durch die von *Bredichin*[3]) abgeleiteten Formeln

$$\begin{aligned} r\sin v &= \sqrt{ap}\;\mathfrak{Sin}\,\vartheta \\ r &= a(e\,\mathfrak{Cof}\,\vartheta + 1). \end{aligned} \tag{23}$$

Damit ist die Berechnung der geozentrischen Örter durch die Gleichungen (16) möglich geworden.

Die bisher noch nicht gebrauchten Elemente Ω', i', ω und q bestimmt man erst, wenn die Bahnverbesserung die endgültigen Werte von x, y, z, x', y', z' und μ geliefert hat. Dann ist (auf den Äquator bezogen)

$$\begin{aligned} \cos i' &= \frac{xy' - yx'}{\sqrt{\mu p}} \\ \sin\Omega'\sin i' &= \frac{yz' - zy'}{\sqrt{\mu p}} \\ \cos\Omega'\sin i' &= \frac{xz' - zx'}{\sqrt{\mu p}} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} r_0\sin u_0 &= \frac{z}{\sin i'} \\ r_0\cos u_0 &= x\cos\Omega' + y\sin\Omega' \end{aligned} \tag{25}$$

$$\omega = u_0 - v_0 \tag{26}$$

$$q = \frac{p}{e-1}. \tag{27}$$

Die Bahnverbesserung. Zur Bahnverbesserung benutzt man am besten dasselbe Prinzip, das bei der gewöhnlichen Bahnbestimmung zur genäherten Verbesserung durch Variation der Distanzen gewählt wird; es ist hier auf die Elemente angewandt. Dabei werden für die Änderungen der Elemente und Koordinaten keine strengen Differentialformeln aufgestellt, sondern es werden nur genäherte Werte der Differentialquotienten berechnet. Als verbesserungsbedürftig wird man im allgemeinen Fall, der hier behandelt werden soll, alle 7 Elemente x, y, z, x', y', z', μ ansehen müssen; nur wenn die erste Näherung schon ein gutes Resultat geliefert hat, wird man sich auf eine Verbesserung von x', y', z' und μ beschränken können. Da der Ausströmungspunkt immer in der Bahn des Kometenkerns liegen muß, wird die Verbesserung von x, y, z so vorgenommen, daß man den Ausströmungsmoment M_0 ändert und die zugehörigen Koordinaten x, y, z aus der Kometenbahn rechnet.

Von den 5 Elementen μ, M_0, x', y', z', die das aus der ersten genäherten Bahn erhaltene System I bilden und denen die Koordinaten α_ν^{I}, δ_ν^{I} (ν = Nummer der Beobachtung) entsprechen sollen, variiert man je eines um einen willkürlichen Betrag $\delta\mu$, $\cdots$ und läßt gleichzeitig die anderen 4 Elemente ungeändert. Auf diese Weise erhält man zu dem System I 5 neue Elementensysteme II, $\cdots$, VI, zu denen die geozentrischen Koordinaten bzw. $\alpha_\nu^{\mathrm{II}}, \delta_\nu^{\mathrm{II}}, \cdots, \alpha_\nu^{\mathrm{VI}}, \delta_\nu^{\mathrm{VI}}$ gehören. Der Zusammenhang zwischen den Änderungen der einzelnen Elemente und den dadurch hervorgerufenen Änderungen der Koordinaten läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \alpha_\nu^{\mathrm{II}} - \alpha_\nu^{\mathrm{I}} &= A_\nu\,\delta\mu & \delta_\nu^{\mathrm{II}} - \delta_\nu^{\mathrm{I}} &= F_\nu\,\delta\mu \\ \alpha_\nu^{\mathrm{III}} - \alpha_\nu^{\mathrm{I}} &= B_\nu\,\delta M_0 & \delta_\nu^{\mathrm{III}} - \delta_\nu^{\mathrm{I}} &= G_\nu\,\delta M_0 \\ \alpha_\nu^{\mathrm{IV}} - \alpha_\nu^{\mathrm{I}} &= C_\nu\,\delta x' & \delta_\nu^{\mathrm{IV}} - \delta_\nu^{\mathrm{I}} &= H_\nu\,\delta x' \\ \alpha_\nu^{\mathrm{V}} - \alpha_\nu^{\mathrm{I}} &= D_\nu\,\delta y' & \delta_\nu^{\mathrm{V}} - \delta_\nu^{\mathrm{I}} &= J_\nu\,\delta y' \\ \alpha_\nu^{\mathrm{VI}} - \alpha_\nu^{\mathrm{I}} &= E_\nu\,\delta z' & \delta_\nu^{\mathrm{VI}} - \delta_\nu^{\mathrm{I}} &= K_\nu\,\delta z' \end{aligned}$$

Hierin sind die $A_\nu, B_\nu, \cdots$ genäherte Werte der Differentialquotienten $\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\mu}, \frac{\partial\alpha_\nu}{\partial M_0}, \cdots$.

Bezeichnet man jetzt die beobachteten Koordinaten mit α_ν, δ_ν, so ist es das Ziel der Bahnverbesserung, diejenigen Elementen-Änderungen $\Delta\mu, \Delta M_0, \cdots$ zu finden, die die Koordinaten $\alpha_\nu^{\mathrm{I}}, \delta_\nu^{\mathrm{I}}$ gerade um die Beträge $\alpha_\nu - \alpha_\nu^{\mathrm{I}}, \delta_\nu - \delta_\nu^{\mathrm{I}}$ ändern. Zwischen diesen Elementen- und Koordinaten-Änderungen bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_\nu - \alpha_\nu^{\mathrm{I}} &= \frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\mu}\Delta\mu + \frac{\partial\alpha_\nu}{\partial M_0}\Delta M_0 + \frac{\partial\alpha_\nu}{\partial x'}\Delta x' + \frac{\partial\alpha_\nu}{\partial y'}\Delta y' + \frac{\partial\alpha_\nu}{\partial z'}\Delta z' \\ \delta_\nu - \delta_\nu^{\mathrm{I}} &= \frac{\partial\delta_\nu}{\partial\mu}\Delta\mu + \frac{\partial\delta_\nu}{\partial M_0}\Delta M_0 + \frac{\partial\delta_\nu}{\partial x'}\Delta x' + \frac{\partial\delta_\nu}{\partial y'}\Delta y' + \frac{\partial\delta_\nu}{\partial z'}\Delta z' \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha_\nu - \alpha_\nu^{\mathrm{I}} &= A_\nu\Delta\mu + B_\nu\Delta M_0 + C_\nu\Delta x' + D_\nu\Delta y' + E_\nu\Delta z' \\ \delta_\nu - \delta_\nu^{\mathrm{I}} &= F_\nu\Delta\mu + G_\nu\Delta M_0 + H_\nu\Delta x' + J_\nu\Delta y' + K_\nu\Delta z' \end{aligned}$$

Nun kann man

[1]) Die Bewegung der Kometenschweifmaterie auf hyperbolischen Bahnen, S. 13f.

[2]) *Carl Burrau*, Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis- und Hyperbelfunktionen). Berlin 1907.

[3]) *Th. Bredichins* mechanische Untersuchungen über Kometenformen. St. Petersburg 1903, S. 295.

$$\begin{array}{ll} \Delta\mu = x_1\,\delta\mu & \Delta x' = x_3\,\delta x' \\ \Delta M_0 = x_2\,\delta M_0 & \Delta y' = x_4\,\delta y' \\ & \Delta z' = x_5\,\delta z' \end{array}$$

setzen, wobei $\delta\mu, \delta M_0, \cdots$ wieder die ursprünglichen willkürlichen Elementenänderungen sind.

Damit wird

$$\alpha_\nu - \alpha_\nu^{\mathrm{I}} = A_\nu x_1\,\delta\mu + B_\nu x_2\,\delta M_0 + C_\nu x_3\,\delta x' + D_\nu x_4\,\delta y' + E_\nu x_5\,\delta z'$$
$$\delta_\nu - \delta_\nu^{\mathrm{I}} = F_\nu x_1\,\delta\mu + G_\nu x_2\,\delta M_0 + H_\nu x_3\,\delta x' + J_\nu x_4\,\delta y' + K_\nu x_5\,\delta z'$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_\nu - \alpha_\nu^{\mathrm{I}} = (\alpha_\nu^{\mathrm{II}} - \alpha_\nu^{\mathrm{I}})\,x_1 + (\alpha_\nu^{\mathrm{III}} - \alpha_\nu^{\mathrm{I}})\,x_2 + (\alpha_\nu^{\mathrm{IV}} - \alpha_\nu^{\mathrm{I}})\,x_3 + \\ \qquad + (\alpha_\nu^{\mathrm{V}} - \alpha_\nu^{\mathrm{I}})\,x_4 + (\alpha_\nu^{\mathrm{VI}} - \alpha_\nu^{\mathrm{I}})\,x_5 \\ \delta_\nu - \delta_\nu^{\mathrm{I}} = (\delta_\nu^{\mathrm{II}} - \delta_\nu^{\mathrm{I}})\,x_1 + (\delta_\nu^{\mathrm{III}} - \delta_\nu^{\mathrm{I}})\,x_2 + (\delta_\nu^{\mathrm{IV}} - \delta_\nu^{\mathrm{I}})\,x_3 + \\ \qquad + (\delta_\nu^{\mathrm{V}} - \delta_\nu^{\mathrm{I}})\,x_4 + (\delta_\nu^{\mathrm{VI}} - \delta_\nu^{\mathrm{I}})\,x_5 \end{array}\right\} \quad (28)$$

Das sind 2ν Gleichungen, aus denen man die Unbekannten $x_1, \cdots x_5$ durch Ausgleichung bestimmt. Das verbesserte Elementensystem hat dann die Gestalt:

$$\begin{array}{ll} \mu + x_1\,\delta\mu & x' + x_3\,\delta x' \\ M_0 + x_2\,\delta M_0 & y' + x_4\,\delta y' \\ & z' + x_5\,\delta z' \,. \end{array}$$

Die Anwendung dieses Verbesserungsverfahrens wird von Fall zu Fall verschieden sein. Sind die nach der Darstellung der Beobachtungen durch die erste Bahn verbleibenden Reste »Beobachtung – Rechnung« noch groß, so wird man auf Grund einer Überlegung über den Einfluß der einzelnen Elemente auf die Darstellung zunächst nur ein oder zwei besonders einflußreiche Elemente herausgreifen und auf diese allein das Bahnverbesserungsverfahren anwenden. Mit der Verbesserung aller Elemente wird man jedenfalls erst beginnen, wenn die Voraussetzung des linearen Zusammenhangs zwischen Koordinaten- und Elementen-Änderungen durch die Kleinheit der Reste einigermaßen als erfüllt angesehen werden kann. Von den speziellen Umständen wird es abhängen, ob es Erfolg verspricht, das Verfahren zweimal anzuwenden.

Wenn das Ergebnis noch nicht völlig befriedigend ist, wird man eine letzte kleine Verbesserung der Darstellung dadurch erreichen können, daß man das Verfahren nochmals nur auf ein oder zwei Elemente allein anwendet. Durch das Variieren der Elemente hat man jedenfalls einen sehr guten Einblick in den Einfluß der Elementenänderungen auf die Darstellung erhalten, sodaß man in jedem Fall leicht wird entscheiden können, auf welche Weise noch ein Fortschritt zu erzielen ist.

IV. Der Schweif des Kometen *Halley* 1910 Juni 5–7.

Im Abschnitt II (S. 4) wurde bereits gesagt, daß zur Bestimmung des Ausströmungsmomentes die von *S. Orloff* berechnete genäherte Bahn benutzt wurde. Für diesen Moment 1910 Juni 4.4283 wurden dann folgende Koordinaten und Geschwindigkeiten aus der Bahn des Kometenkerns erhalten:

$$\begin{array}{ll} \log x = 9.93025_{\mathrm{n}} & \log x' = 0.10008_{\mathrm{n}} \\ \log y = 9.77271_{\mathrm{n}} & \log y' = 9.49033 \\ \log z = 9.57572_{\mathrm{n}} & \log z' = 9.43094_{\mathrm{n}} \\ \log r = 0.04284 & \log r' = 9.95475 \end{array}$$

Die *Orloff*sche Bahn hatte $\mu = -69.14$ ergeben.

Mit diesen Elementen wurden die zur Darstellung der Beobachtungen nötigen Größen berechnet:

$$\begin{array}{l} \log p = 8.22000 \\ e = 1.0151 \\ v_0 = +0^\circ 47' 17'' \\ \log a = 9.73713 \\ M_\pi = 1910 \text{ Juni } 3.5216 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A' = 232^\circ 14' 11'' & \log\sin a = 9.98492 \\ B' = 325\ 54\ 15 & \log\sin b = 9.99019 \\ C' = 275\ 41\ 37 & \log\sin c = 9.53567 \end{array}$$

Tabelle 8 zeigt die Darstellung der Beobachtungen.

Tabelle 8. Darstellung der Beobachtungen durch die erste Bahn (M_0 = Juni 4.4283).

Beob.-Nr.	B – R $\Delta\alpha$	B – R $\Delta\delta$
1	$-0^\circ 50' 9''$	$+21' 0''$
2	$-1\ 0\ 54$	$+23\ 21$
3	$-1\ 21\ 29$	$+25\ 34$
4	$-1\ 21\ 23$	$+24\ 48$
5	$-1\ 21\ 43$	$+25\ 37$
6	$-1\ 23\ 18$	$+26\ 26$
7	$-1\ 22\ 21$	$+25\ 42$
8	$-1\ 23\ 53$	$+25\ 52$
9	$-1\ 22\ 35$	$+25\ 50$
10	$-1\ 22\ 26$	$+27\ 49$
11	$-1\ 22\ 0$	$+26\ 19$
12	$-1\ 24\ 57$	$+29\ 7$

Diese Darstellung ist noch sehr ungenügend. Da die berechneten Schweiförter bei allen Beobachtungszeiten im Sinne der Schweifteilchenbewegung über die beobachteten Örter hinausliegen, war zu erwarten, daß die Verschiebung des Ausströmungsmomentes auf einen späteren Zeitpunkt die Darstellung der Beobachtungen verbessern würde. Deshalb wurde zunächst nur der Ausströmungsmoment um $+0^{\mathrm{d}}5$ geändert; alle anderen Elemente wurden ungeändert beibehalten. Diese mit dem korrigierten Ausströmungsmoment $M_0 = 1910$ Juni 4.9283 gerechnete Bahn liegt im Gegensatz zur vorherigen wegen der Beibehaltung der ursprünglichen Anfangsgeschwindigkeiten nun nicht mehr streng in der Ebene der Kometenbahn. Es ergaben sich die Elemente

$$\begin{array}{l} \log p = 8.22603 \\ e = 1.0152 \\ v_0 = +0^\circ 47' 36'' \\ \log a = 9.74031 \\ M_\pi = 1910 \text{ Juni } 4.0083 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A' = 232^\circ 35' 26'' & \log\sin a = 9.98534 \\ B' = 326\ 1\ 2 & \log\sin b = 9.98657 \\ C' = 275\ 38\ 57 & \log\sin c = 9.53526 \end{array}$$

und die in Tabelle 9 gegebene Darstellung der Beobachtungen.

Diese Darstellung der Beobachtungen ist wesentlich besser als die vorhergehende. Die Reste schienen genügend klein, um jetzt mit dieser Ausgangsbahn die eigentliche Bahnverbesserung zu beginnen.

Tabelle 9. Darstellung der Beobachtungen bei verbessertem Ausströmungsmoment (M_0 = Juni 4.9283).

Beob.-Nr.	B−R $\Delta\alpha$	B−R $\Delta\delta$
1	−19′ 50″	+8′ 17″
2	−25 40	+8 28
3	−22 57	+1 7
4	−22 51	+0 21
5	−23 11	+1 10
6	−22 53	+1 9
7	−20 0	−0 25
8	−21 32	−0 15
9	−20 14	−0 17
10	−10 35	−2 10
11	−3 27	−6 24
12	−5 10	−4 9

Die 5 Größen μ, M_0, x', y', z' wurden nacheinander um folgende Beträge variiert (zum Teil nach vergeblichen Versuchen mit anderen Beträgen):

$$\delta\mu = -20 \qquad \delta x' = +10 \text{ km}$$
$$\delta M_0 = -0^d.2 \qquad \delta y' = -2 \text{ »}$$
$$\delta z' = +2 \text{ »}$$

Mit jedem der dadurch entstehenden 5 Elementensysteme wurde eine Darstellung der Beobachtungen gerechnet (vergl. Tabelle 10); die 5 Unbekannten $x_1(\mu)$, $x_2(M_0)$, $x_3(x')$, $x_4(y')$, $x_5(z')$ wurden aus den Gleichungen (28) [Abschnitt III] durch Ausgleichung bestimmt. Dabei wurde zunächst der Einfluß, den eine Änderung von y' und z' auf die Darstellung der Beobachtungen ausübt, gleich 0 angenommen. Die Gleichungen (28) wurden also zuerst nur für x_1, x_2, x_3 angesetzt und erst als diese 3 Unbekannten bestimmt waren, wurden durch eine zweite Ausgleichung x_4 und x_5 berechnet. Auf diesem Wege ergab sich

Tabelle 10.

Darstellung der Beobachtungen nach der Variation der einzelnen Elemente (B−R).

Beob.-Nr.	$\delta\mu = -20$ $\Delta\alpha$	$\delta\mu = -20$ $\Delta\delta$	$\delta M_0 = -0^d.2$ $\Delta\alpha$	$\delta M_0 = -0^d.2$ $\Delta\delta$	$\delta x' = +10$ km $\Delta\alpha$	$\delta x' = +10$ km $\Delta\delta$	$\delta y' = -2$ km $\Delta\alpha$	$\delta y' = -2$ km $\Delta\delta$	$\delta z' = +2$ km $\Delta\alpha$	$\delta z' = +2$ km $\Delta\delta$
1	+17′ 20″	− 7′ 4″	− 9′ 4″	+ 3′ 52″	−24′ 13″	+13′ 56″	+ 6′ 14″	− 4′ 2″	+ 0′ 32″	− 4′ 13″
2	+ 8 32	− 5 30	−17 17	+ 5 11	−27 34	+14 5	− 0 39	− 3 40	− 5 7	− 4 54
3	−11 49	− 3 15	−26 20	+ 2 38	−16 13	+ 6 48	− 5 8	− 9 43	− 4 49	−15 49
4	−11 43	− 4 1	−26 14	+ 1 52	−16 7	+ 6 2	− 5 2	−10 29	− 4 43	−16 35
5	−12 3	− 3 12	−26 34	+ 2 41	−16 27	+ 6 51	− 5 22	− 9 40	− 5 3	−15 46
6	−14 26	− 1 59	−27 16	+ 3 10	−15 14	+ 6 53	− 5 36	− 9 38	− 4 56	−16 1
7	−14 41	− 2 18	−25 23	+ 1 56	−11 33	+ 5 21	− 3 34	−10 55	− 2 26	−17 53
8	−16 13	− 2 8	−26 55	+ 2 6	−13 5	+ 5 31	− 5 6	−10 45	− 3 58	−17 43
9	−14 55	− 2 10	−25 37	+ 2 4	−11 47	+ 5 29	− 3 48	−10 47	− 2 40	−17 45
10	−21 21	+ 2 44	−21 13	+ 2 22	+ 1 19	+ 4 2	+ 2 10	−11 59	+ 5 49	−21 16
11	−28 19	+ 4 27	−17 58	− 0 14	+10 16	+ 0 28	+ 5 51	−15 23	+12 0	−26 39
12	−33 6	+ 8 4	−20 17	+ 2 20	+ 8 55	+ 2 57	+ 3 58	−13 4	+10 2	−24 34

$x_1(\mu) = +1.0616$ $\quad x_3(x') = +0.7745$
$x_2(M_0) = -1.4916$ $\quad x_4(y') = +0.0127$
$\quad x_5(z') = -0.0081$

$\mu = -90.37$ $\quad M_0 = 1910$ Juni 5.2266

$\log x = 9.93894_n$ $\quad \log x' = 9.99950_n$
$\log y = 9.76955_n$ $\quad \log y' = 9.48912$
$\log z = 9.57993_n$ $\quad \log z' = 9.43182_n$
$\log r = 0.04766$ $\quad \log r' = 9.84951$

$\log p = 7.96264$
$e = 1.0082$
$v_0 = +0^\circ 24' 18''$
$\log a = 9.74516$
$M_\pi = 1910$ Juni 4.6620

$A' = 234^\circ 23' 4''$ $\quad \log\sin a = 9.97904$
$B' = 327\ 19\ 33$ $\quad \log\sin b = 9.99443$
$C' = 263\ 33\ 17$ $\quad \log\sin c = 9.53469$

Tabelle 11 enthält die Darstellung (I) der Beobachtungen.

Tabelle 11. Darstellung (I) der Beobachtungen nach der Bahnverbesserung.

Beob.-Nr.	1910 Juni	B−R $\Delta\alpha$	B−R $\Delta\delta$
3	6.65	−2′ 26″	−2′ 26″
4	»	−2 20	−3 12
5	»	−2 40	−2 23
6	6.74	−1 16	−1 57
7	6.83	+1 3	−2 55
8	»	−0 29	−2 45
9	»	+0 49	−2 47
10	7.29	+5 53	−1 16
11	7.66	+6 55	−1 45
12	7.74	+3 28	+1 32

Die Beobachtungen Nr. 1 und 2 wurden bei der Bahnverbesserung nicht benutzt, da es sehr fraglich erscheint, ob die Messungen sich auf dieselbe Schweifmaterie wie bei den nachfolgenden Beobachtungen beziehen.

Um das Ergebnis dieser Darstellung (I) noch zu verbessern und vor allem den Gang herauszuschaffen, wurde

die Ausgleichung noch einmal wiederholt, und zwar wurden in den Gleichungen (28) die Koeffizienten $\alpha_\nu^{II} - \alpha_\nu^{I}$, $\delta_\nu^{II} - \delta_\nu^{I}$, usw. unverändert übernommen; für die linken Seiten wurden die Reste eingesetzt, die sich bei der Darstellung (I) ergeben hatten. Das Resultat entsprach jedoch nicht den Erwartungen, die Darstellung der Deklinationen war wesentlich verschlechtert.

Daraufhin wurde noch ein weiterer Versuch unternommen, die Darstellung der Beobachtungen zu verbessern: die 3 einflußreichsten Elemente x', M_0 und μ wurden noch einmal variiert, wobei die nach der ersten Ausgleichung erhaltenen Elemente ($M_0 =$ Juni 5.2266) als Ausgangsdaten dienten. Eine Änderung von x' um 0.1 km verschlechterte die Darstellung derartig, daß die Absicht, dieses Element in die neue Ausgleichung mit hineinzunehmen, fallen gelassen wurde.

M_0 wurde um -0^d02 geändert und führte zu der in Tabelle 12 gegebenen Darstellung (II).

Tabelle 12. Darstellung (II) der Beobachtungen nach nochmaliger Variation von M_0.

Beob.-Nr.	B − R $\Delta\alpha$	B − R $\Delta\delta$
3	−4′ 20″	−1′ 5″
4	−4 14	−1 51
5	−4 34	−1 2
6	−4 30	−0 33
7	−2 5	−1 35
8	−3 37	−1 25
9	−2 19	−1 27
10	+2 6	+0 22
11	+2 43	+0 4
12	−0 38	+3 21

Durch eine Änderung von μ um 1 Einheit ergab sich Tabelle 13.

Tabelle 13. Darstellung (III) der Beobachtungen nach nochmaliger Änderung von μ.

Beob.-Nr.	B − R $\Delta\alpha$	B − R $\Delta\delta$
3	−6′ 46″	−0′ 11″
4	−6 40	−0 57
5	−7 0	−0 8
6	−6 51	+0 17
7	−4 28	−0 43
8	−6 0	−0 33
9	−4 42	−0 35
10	+0 6	+1 4
11	+0 39	+0 44
12	−2 43	+3 59

Die Ausgleichung, die auf den durch die Darstellungen (II) und (III) erhaltenen Resten »Beobachtung − Rechnung« aufgebaut war, führte nicht zum Ziel; die Darstellung der Beobachtungen mit den neuen Elementen war schlechter als die Darstellung (I).

Wie aus den Darstellungen (II) und (III) zu ersehen ist, kann eine kleine Änderung von M_0 oder μ allein die Darstellung (I) nicht mehr verbessern; der Gang in Darstellung (I) war auf keine Weise zu kompensieren. Daß dieser Gang nicht zu beseitigen ist, liegt an der Unmöglichkeit, auf den Aufnahmen von Juni 7 genau den Punkt der Schweifverdichtung zu messen, der dem auf den Aufnahmen von Juni 6 gemessenen Punkt entspricht; dafür spricht die Tatsache, daß die Darstellung bedeutend besser wird, sobald man die Örter von Juni 6 und Juni 7 getrennt betrachtet.

Das Elementensystem, das zur Darstellung (I) geführt hat, ist das beste, das zu erlangen war. Die bisher noch nicht benötigten Elemente wurden jetzt berechnet; damit bekam das System die endgültige Gestalt

$$\log p = 7.96264 \qquad \log q = 0.04883$$
$$e = 1.0082 \qquad \log a = 9.74516$$

$$\mu = -90.4$$
$$M_\pi = 1910 \text{ Juni } 4.6620$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 263^\circ 33' 23'' \\ \Omega' &= 117\ 40\ 29 \\ i' &= 159\ 58\ 12 \end{aligned}\right\} \text{Mittl. Äquator und Äquinoktium 1910.0}$$

Die Elemente Ω' und i' wurden noch auf die Ekliptik transformiert:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= 53^\circ\ 4' 29'' \\ i &= 157\ 42\ 6 \end{aligned}\right\} 1910.0\,.$$

Für die Bahn des Kometenkerns ist

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= 57^\circ 15' 56'' \\ i &= 162\ 12\ 34 \end{aligned}\right\} 1910.0\,.$$

Die Bewegung der Schweifwolke hat also nicht in der Ebene der Kometenbahn stattgefunden. Das für die Theorie der Kometenschweife wichtigste Element μ hat sich beim Übergang von der Ebene zum Raum von -69.1 auf -90.4 geändert. Man kann annehmen, daß bei diesem Übergang von der Bahn in der Ebene zur verbesserten im Raum in den meisten Fällen eine Änderung von μ eintritt, die um so stärker sein wird, je näher sich die Erde der Bahnebene des Kometen befindet. Deshalb dürfen μ-Werte, die aus ebenen Bahnen erhalten sind, nie als Grundlage bei physikalischen Überlegungen über die Natur der Repulsivkraft dienen.

Lebenslauf.

Geboren wurde ich, Friedrich Peter Max Gondolatsch, am 3. Juni 1904 in Görlitz als Sohn des Oberschullehrers Max Gondolatsch und seiner Ehefrau Katharina, geb. Fellbaum. Ich bin preußischer Staatsangehörigkeit und protestantischer Konfession. Nach 3 Jahren Unterricht an der städtischen Gemeindeschule besuchte ich von Ostern 1913 bis Ostern 1923 das städtische humanistische Gymnasium in Görlitz.

Das Studium der Astronomie begann ich an der Universität Leipzig. Von Ostern 1923 bis Ostern 1924 hörte ich dort astronomische Vorlesungen bei Herrn Professor Bauschinger, mathematische, physikalische und chemische Vorlesungen bei den Herren Prof. Lichtenstein, Dr. Schnee, Prof. Wiener und Prof. Hantzsch. Von Ostern 1924 bis Ostern 1925 studierte ich an der Universität und an der Technischen Hochschule in München. Astronomische Vorlesungen hörte ich bei den Herren Professoren Großmann und Zinner; unter Leitung von Prof. Großmann stellte ich Beobachtungen an den Instrumenten der Sternwarte an. Die mathematischen und physikalischen Vorlesungen und Übungen besuchte ich bei den Herren Professoren Caratheodory, Faber (an der Technischen Hochschule) und Graetz. Unter Leitung von Herrn Prof. Graetz nahm ich in beiden Semestern an den physikalischen Übungen teil.

Von Ostern 1925 bis Ostern 1929 besuchte ich die Universität Berlin. Mein astronomisches Studium setzte ich besonders unter Leitung von Herrn Prof. Kopff fort, auf dessen Anregung hin ich auch meine Doktorarbeit anfertigte. Astronomische Vorlesungen, Übungen und Kolloquien besuchte ich bei den Herren Professoren Kopff, Guthnick und A. Kohlschütter. Ferner nahm ich an den praktischen astronomischen Übungen auf der Urania-Sternwarte teil. Bei den Herren Professoren Bieberbach, Schmidt, Schur, von Mises, Hammerstein, Szegö, von Laue, Planck und Schrödinger besuchte ich mathematische und physikalische Vorlesungen und Übungen. Philosophische Vorlesungen hörte ich bei den Herren Professoren Driesch und Litt in Leipzig, Dessoir, F. J. Schmidt und Spranger in Berlin.

Seit 1. Mai 1927 bin ich als Hilfsarbeiter, seit 1. November 1928 als außerplanmäßiger Assistent am Astronomischen Rechen-Institut in Berlin-Dahlem angestellt.